SUCESIONES Y SERIES DE NÚMEROS REALES

JORGE A. GUCCIONE AND JUAN J. GUCCIONE

Contents

1 Definición y ejemplos

Una *sucesión de números reales* es una función $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, *el n-ésimo término* de esta sucesión es $x_n := x(n)$. La sucesión $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ será denotada con $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o más simplemente con (x_n). A veces aparecen naturalmente sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ que comienzan en cero. Esto no agrega nada pues el cambio de índice $y_n := x_{n-1}$ las convierte en sucesiones $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que comienzan en 1. También resulta cómodo considerar sucesiones $(x_n)_{n\geq n_0}$, que comienzan en un entero n_0. Cuando n_0 es un número natural podemos considerarlas como sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con el símple trámite de definir $x_1 = \cdots = x_{n_0-1} = 0$. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es

- *constante* si existe $a \in \mathbb{R}$, tal que $x_n = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$,
- *superiormente acotada* si existe $a \in \mathbb{R}$, tal que $x_n \leq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$,
- *inferiormente acotada* si existe $a \in \mathbb{R}$, tal que $a \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$,
- *acotada* si es superior e inferiormente acotada,
- *creciente* si $x_m \leq x_n$ para todo $m < n$,
- *estrictamente creciente* si $x_m < x_n$ para todo $m < n$,
- *decreciente* si $x_m \geq x_n$ para todo $m < n$,
- *estrictamente decreciente* si $x_m > x_n$ para todo $m < n$,
- *monótona* si es creciente o decreciente,
- *estrictamente monótona* si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente,
- *inyectiva* si $x_m \neq x_n$ para todo $n \neq m$. En este caso diremos también que los x_n son *dos a dos distintos*.

Remark 1.1. Claramente una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada si y sólo si la sucesión $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$, de sus módulos, lo está.

Remark 1.2. Una sucesión es estrictamente creciente si y sólo si es creciente e inyectiva. Similarmente, una sucesión es estrictamente decreciente si y sólo si es decreciente e inyectiva.

Remark 1.3. Una sucesión creciente está acotada inferiormente por su primer término y de la misma manera una sucesión decreciente está acotada superiormente. Por lo tanto una sucesión creciente está acotada si y sólo si lo está superiormente, mientras que una sucesión decreciente está acotada si y sólo si lo está inferiormente.

Remark 1.4. Claramente una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada superiormente por A si y sólo si la sucesión $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de sus opuestos, está acotada inferiormente por $-A$.

Proposition 1.5. *Para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales son equivalentes:*

(1) *Existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $a > 0$ tales que $x_n \neq 0$ y $1/x_n > a$ para todo $n \geq n_0$.*

(2) *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada superiormente y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > 0$ para todo $n \geq n_0$.*

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) Porque de $x_n \neq 0$ y $1/x_n > a$ para todo $n \geq n_0$ se sigue que $0 < x_n < 1/a$ para todo $n \geq n_0$

(2) $\Rightarrow$ (1) Por hipótesis existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $A \in \mathbb{R}$ positivo, tale que $0 < x_n < A$ para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto $x_n \neq 0$ y $\frac{1}{x_n} > \frac{1}{A}$ para todo $n \geq n_0$. □

Proposition 1.6. *Para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales son equivalentes:*

(1) *Existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $a < 0$ tales que $x_n \neq 0$ y $1/x_n < a$ para todo $n \geq n_0$.*

(2) *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada inferiormente y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < 0$ para todo $n \geq n_0$.*

Proof. Se sigue facilmente de la Proposición anterior y de la Nota 1.4. □

Example 1.7. Fijemos $a \in \mathbb{R}$ y consideremos la sucesión $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si $0 < a < 1$, entonces $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente decreciente de términos positivos. En efecto, es claro que $a^n > 0$ para todo n. Multiplicando $a < 1$ por a^n obtenemos $a^{n+1} < a^n$ para todo n. Supongamos ahora que $-1 < a < 0$. En este caso $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es monótona pues sus términos son alternadamente positivos y negativos; pero está acotada, pues la sucesión de sus módulos lo está, ya que $|a^n| = |a|^n$ con $0 < |a| < 1$. Cuando $a = 0$ o $a = 1$ obtenemos la sucesión constantemente igual a a y cuando $a = -1$ obtenemos la sucesión alternada con términos impares iguales a -1 y términos pares iguales a 1. Supongamos ahora que $a > 1$. Multiplicando está desigualdad por el número positivo a^n obtenemos que $a^n < a^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que, en este caso, la sucesión $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente. Además no está acotada, ya que, por la desigualdad de Bernouli,

$$a^n = (1 + (a-1))^n > 1 + n(a-1) \qquad \text{para todo } n > 1.$$

Finalmente, en el caso $a < -1$ la sucesión no es monótona (pues sus términos son alternadamente positivos y negativos), ni tampoco está acotada, pues la sucesión de sus módulos no lo está, ya que $|a^n| = |a|^n$ con $1 < |a|$.

Example 1.8. Para cada $0 < a < 1$ consideremos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definida por

$$x_n = 1 + a + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Es evidente que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente, pues $x_{n+1} = x_n + a^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además está acotada superiormente ya que $x_n < \frac{1}{1-a}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Example 1.9. Fijemos $a \in \mathbb{R}$ positivo y consideremos la sucesión $(\sqrt[n]{a})_{n\in\mathbb{N}}$. Notemos que

$$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n+1]{a} \iff a^{n+1} > a^n \qquad \text{y} \qquad \sqrt[n]{a} < \sqrt[n+1]{a} \iff a^{n+1} < a^n.$$

Por lo tanto la sucesión $(\sqrt[n]{a})_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente crecience si $0 < a < 1$ y estrictamente decreciente si $1 < a$. Además en el primer caso, esta sucesión está acotado inferiormente por a y superiormente por 1, mientras que, en el segundo, está acotada inferiormente por 1 y superiormente por a.

Example 1.10. Consideremos la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definida por

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Es evidente que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamenyte creciente. Como, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \le 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada superiormente.

Example 1.11. Consideremos la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definida por $b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por la fórmula del binomio

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + \frac{n}{1!}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{2!}\frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right), \end{aligned}$$

de lo cual se sigue facilmente que la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente. Además $b_n < a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (donde a_n es como en el ejemplo anterior), de modo que $b_n < 3$ para todo n.

Example 1.12. Consideremos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terminos positivos, definida por $x_n := \sqrt[n]{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Notemos que

$$\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1} \Longleftrightarrow n^{n+1} > (n+1)^n \Longleftrightarrow n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Como $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente decreciente a partir del tercer valor y, en consecuencia, está acotada. Notemos por último que $x_1 < x_2 < x_3$ y $1 \le x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Recordemos que un subconjunto $\mathbb{N}'$ de $\mathbb{N}$ es infinito si y sólo si no es acotado y que, en este caso, existe una única función biyectiva y creciente $n\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$. Como venimos haciendolo denotaremos a esta función con $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Una subsucesión de una sucesión $x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la restricción de la función x a un subconjunto infinito $\mathbb{N}'$ de $\mathbb{N}$. Denotaremos con $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ a esta subsucesión y la identificamos con la sucesión $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$, obtenida componiendo x con la función $n\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$, mencionda en el párrafo anterior.

Remark 1.13. Para que una sucesión monótona $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ esté acotada es necesario y suficiente que tenga una subsucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ que lo esté. En efecto es evidente que esta condición es necesaria pues podemos considerar a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como una subsucesión de si misma. Supongamos ahora por ejemplo que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ es una subsucesión acotada superiormente de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $n' \in \mathbb{N}'$ tal que $n < n'$. En consecuencia, si $b \in \mathbb{R}$ es una cota superior de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$, entonces $x_n \le x_{n'} \le b$ y, por lo tanto, b también es una cota superior de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. El caso en que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente es similar. Notemos que hemos probado que toda sucesión creciente tiene las mismas cotas superiores que cualquiera de sus subsucesiones y, analogamente, toda sucesión decreciente tiene las mismas cotas inferiores que cualquiera de sus subsucesiones.

2 Límite de sucesiones

Definition 2.1. Diremos que un número real a es *límite* de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* (o *tiende*) a a, y escribiremos $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ o $a = \lim x_n$, si para cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \epsilon$, para todo $n \geq n_0$.

Remark 2.2. Claramente la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a si y sólo si la sucesión $(|x_n - a|)_{n\in\mathbb{N}}$, converge a 0.

Si una sucesión no converge a ningún límite diremos que es *divergente*. El siguiente teorema dice que una sucesión puede tener a lo sumo un límite.

Theorem 2.3. *Si $a = \lim x_n$ y $b = \lim x_n$, entonces $b = a$.*

Proof. Supongamos que $a = \lim x_n$ y que $b \neq a$. Tomemos $\epsilon := (b-a)/2$. Por definición existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto $|x_n - b| > \epsilon$ para todo $n \geq n_0$, ya que si $|x_n - b| \leq \epsilon$ para algún $n \geq n_0$, entonces $|b - a| \leq |b - x_n| + |x_n - a| < 2\epsilon = |b - a|$. En particular la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a b. □

Proposition 2.4. *Todo subsucesión de una sucesión que converge a un número real, también converge a este número.*

Proof. Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $a \in \mathbb{R}$ y consideremos una subsucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Tomemos $n_0 \in \mathbb{N}'$ tal que $n_0' \geq n_0$. Si $n' \in \mathbb{N}'$ es mayor o igual que n_0', entonces $n' \geq n_0$ y, por lo tanto, $|x_{n'} - a| < \epsilon$. Así $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ tiende a a. □

Corollary 2.5. *Si la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a a, entonces, para cada entero positivo k, la sucesión $(x_{n+k})_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a a.*

La siguiente proposición es una recíproca del corolario anterior, que escencialmente dice que la convergencia y el límite de una sucesión no se alteran se si modifican sus primeros términos.

Proposition 2.6. *Consideremos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de términos reales y un punto $a \in \mathbb{R}$. Si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(x_{n+k})_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a a, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a a.*

Proof. Tomemos $\epsilon > 0$ arbitrario. Como la sucesión $(x_{n+k})_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a a, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{n+k} - a| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto $|x_n - a| < \epsilon$ para todo $n > n_0 + k$ y, en consecuencia, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a. □

Theorem 2.7. *Toda sucesión convergente está acotada.*

Proof. Consideremos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de términos reales y denotemos con a a su límite. Por definición existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a-1 < x_n < a+1$ para todo $n \geq n_0$. Llamemos b y c al mínimo y máximo de $\{x_1, \dots, x_{n_0-1}, a-1, a+1\}$, respectivemente. Es claro que $b \leq x_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Example 2.8. Una sucesión constantemente igual a a converge a a.

Example 2.9. Si $|a| > 1$, entonces la sucesión $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ no está acotada y, por lo tanto, diverge. Si $a = 1$, entonces la sucesión $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es constantemente igual a 1 y, por lo tanto, converge a 1. La sucesión $(-1)^n$ diverge, pues su subsucesión de sus términos pares converge a 1, mientras que su subsucesión de sus términos impares converge a -1. Finalmente si $|a| < 1$, entonces la sucesión $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0. En efecto, tomemos $\epsilon > 0$ arbitrario. Como $1/|a| > 1$ la sucesión $(1/|a|)^n$ es estrictamente creciente y no acotada. Así existe n_0 tal que $1/|a|^n = (1/|a|)^n \geq (1/|a|)^{n_0} > 1/\epsilon$ para todo $n > n_0$ y, por lo tanto, $|a^n| < \epsilon$ para todo $n > n_0$. En consecuencia $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, como afirmamos.

Example 2.10. Para cada $0 < a < 1$ la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definida por

$$x_n = 1 + a + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

converge a $\frac{1}{1-a}$. En efecto, por el ejemplo anterior, para cada $\epsilon > 0$ existe n_0, tal que $|a^n| < \epsilon|1-a|$ para todo $n > n_0$. Así

$$\left|x_n - \frac{1}{1-a}\right| = \left|\frac{1-a^{n+1}}{1-a} - \frac{1}{1-a}\right| = \frac{|a|^{n+1}}{|1-a|} < \epsilon \qquad \text{para todo } n \geq n_0,$$

por lo que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a $\frac{1}{1-a}$.

Theorem 2.11. *Para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, monótona y acotada de números reales, vale lo siguiente:*

(1) *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $\lim x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

(2) *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $\lim x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Proof. (1) Denotemos con a al supremo de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Por definición $x_n \leq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, para cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $a - \epsilon < x_{n_0}$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente se sigue de esto que $a - \epsilon < x_n \leq a$ para todo $n \geq n_0$.
(2) Copie la prueba del item (1). □

Example 2.12. Por el teorema anterior la sucesión $(\sqrt[n]{a})_{n\in\mathbb{N}}$ presentada en el Ejemplo 1.9, converge a un límite ℓ. Además si $0 < a < 1$, entonces $a < \ell \leq 1$; si $a = 1$, entonces $\ell = 1$; y, si $1 < a$, entonces $1 \leq \ell < a$. Veremos más adelante que ℓ siempre es 1.

Example 2.13. Las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ presentadas en los Ejemplos 1.10 y 1.11 son estrictamente crecientes y acotadas por 3. Además $b_2 = 2$ y $b_n \leq a_n$ para todo n. Por lo tanto, debido al teorema anterior, las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen y $2 < \lim b_n \leq \lim a_n \leq 3$. Veremos más adelante que $\lim b_n = \lim a_n$.

Example 2.14. Por la Proposición 2.6 y el teorema anterior, la sucesión $(\sqrt[n]{n})_{n\in\mathbb{N}}$ presentada en el Ejemplo 1.12, converge a un límite $\ell \geq 1$.

Corollary 2.15. *Toda sucesión monótona que tiene una subsucesión que converge a un punto a, también converge a a.*

Proof. Supongamos por ejemplo que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ es una subsucesión de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a un punto a. Por el Teorema 2.11 la serie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ es acotada y $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}'\}$. Por la Nota 1.13 se sigue de esto que $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, de donde, nuevamente por el Teorema 2.11, la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a. □

3 Propiedades aritméticas de los límites

Proposition 3.1. *Si $\lim x_n = 0$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, entonces $\lim x_n y_n = 0$.*

Proof. Como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada existe $a > 0$ en $\mathbb{R}$, tal que $|y_n| \leq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, como $\lim x_n = 0$, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n| < \epsilon a^{-1}$ para todo $n \geq n_0$. En consecuencia, $|x_n y_n| = |x_n||y_n| < \epsilon a^{-1} a = \epsilon$ para todo $n \geq n_0$, lo que muestra que $\lim x_n y_n = 0$. □

Proposition 3.2. *Si la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $\lim x_n = a \neq 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n| > |a|/2$ para todo $n \geq n_0$.*

Proof. Tomemos $\epsilon := |a|/2$. Por definición existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. En consecuencia $|x_n| > |a|/2$ para todo $n \geq n_0$. □

Los cocientes $\frac{x_n}{y_n}$ que aparecen en el tercer item del siguiente teorema no están definidos cuando $y_n = 0$. En estos casos los reemplazamos por un valor arbitrario. Debido a la Proposición 2.6 y a que para n suficientemente grande $y_n \neq 0$, esto no trae ningún problema.

Theorem 3.3. *Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones convergentes y escribamos $a := \lim x_n$ y $b := \lim y_n$. Las siguientes afirmaciones valen:*

(1) $\lim(x_n + y_n) = a + b$,
(2) $\lim(x_n y_n) = ab$,
(3) *si* $b \neq 0$, *entonces* $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

Proof. (1) Por hipótesis, dado $\epsilon > 0$ existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que $|x_n - a| < \epsilon/2$ para todo $n \geq n_1$ y $|y_n - b| < \epsilon/2$ para todo $n \geq n_2$. Por lo tanto

$$|x_n + y_n - (a + b)| = |x_n - a| + |y_n - b| < \epsilon \qquad \text{para todo } n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}.$$

Por lo tanto $\lim(x_n + y_n) = a + b$, como afirmamos.

(2) Por la Nota 2.2 será suficiente probar que $\lim(x_n y_n - ab) = 0$. Para ello, como

$$x_n y_n - ab = (x_n - a)y_n + a(y_n - b),$$

debido al item (1) será suficiente ver que $\lim(x_n - a)y_n = 0$ y $\lim a(y_n - b)$. Pero esto se sigue de la Proposición 3.1, de que $\lim(x_n - a) = \lim(y_n - b) = 0$, y de que, por el Teorema 2.7, tanto la sucesión constantemente igual a a, como la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, son acotadas.

(3) Por la Nota 2.2 será suficiente probar que $\lim\bigl(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\bigr) = 0$. Como

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = (x_n b - y_n a)\frac{1}{y_n b} \qquad \text{y} \qquad \lim(x_n b - y_n a) = 0,$$

se sigue de la Proposición 3.1 que sólo debemos probar que la sucesión $\bigl(\frac{1}{y_n b}\bigr)$ es acotada. Pero esto vale porque, debido a que $\lim y_n = b$ y a la Proposición 3.2, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n| > |b|/2$ para todo $n \geq n_0$ y, por lo tanto, $\frac{1}{|y_n||b|} < \frac{2}{b^2}$ para todo $n \geq n_0$. □

Corollary 3.4. *Si las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq y_n$ para todo $n \geq n_0$, entonces $\lim x_n \leq \lim y_n$.*

Proof. En caso contrario, debido al teorema anterior, $\lim(x_n - y_n) > 0$, por lo que, debido a la Proposición 3.2, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $y_n < x_n$ para todo $n \geq n_1$, lo que se contradice con la hipótesis. □

Example 3.5. Fijemos $a \in \mathbb{R}$ positivo. En el Ejemplo 2.12 vimos que la sucesión $(\sqrt[n]{a})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un límite $\ell \neq 0$. Probaremos a continuación que $\ell = 1$. Para ello consideremos la subsucesión $(a^{1/n(n+1)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(a^{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$. Como $\ell \neq 0$ se sigue de la Proposición 2.4 y el item (3) del teorema anterior, que

$$\ell = \lim a^{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim a^{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} = \lim \frac{a^{1/n}}{a^{1/(n+1)}} = \frac{\lim a^{1/n}}{\lim a^{1/(n+1)}} = \frac{\ell}{\ell} = 1.$$

Una demostración alternativa se la obtiene considerando la subsucesión $(a^{1/2n})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(a^{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ y, usando que, por la Proposición 2.4 y el item (2) del teorema anterior,

$$\ell^2 = \bigl[\lim a^{\frac{1}{2n}}\bigr]^2 = \lim\bigl[a^{\frac{1}{2n}}\bigr]^2 = \lim a^{\frac{1}{n}} = \ell,$$

lo cual implica que $\ell = 1$, ya que sabemos que $\ell \neq 0$.

Example 3.6. Consideremos las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ presentadas en los Ejemplos 1.10 y 1.11. Ya vimos en el Ejemplo 2.13, que estas sucesiones convergen y que y $2<\lim b_n\le\lim a_n\le 3$. Probaremos a continuación que $\lim a_n \le \lim b_n$. Para ello fijemos $p\in\mathbb{N}$ arbitrario y definamos la sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por

$$c_n := 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{p!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{n}\right),$$

Es fácil ver que la sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente, que $c_n=b_n$ para $n\le p$ y que $c_n<b_n$ para $n>p$. Así, por los Teoremas 2.11 y 3.3,

$$a_p=\lim c_n\le\lim b_n \qquad \text{para todo } p\in\mathbb{N},$$

por lo que $\lim a_p\le\lim b_n$, como queremos.

Example 3.7. En el Ejemplo 2.14 vimos que la sucesión $(\sqrt[n]{n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un límite $\ell\ge 1$. Probaremos a continuación que $\ell=1$. Para ello consideremos la subsucesión $((2n)^{1/(2n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(n^{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$. Por la Proposición 2.4 y el item (2) del teorema anterior,

$$\ell^2=\left[\lim(2n)^{\frac{1}{2n}}\right]^2=\lim\left[(2n)^{\frac{1}{2n}}\right]^2=\lim(2n)^{\frac{1}{n}}=\lim 2^{\frac{1}{n}}\lim n^{\frac{1}{n}}=\ell,$$

lo cual implica que $\ell=1$, ya que sabemos que $\ell\ne 0$.

Theorem 3.8. *Consideremos sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Supongamos que existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $x_n\le y_n\le z_n$ para todo $n\ge n_0$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen al mismo límite, entonces $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $\lim y_n=\lim x_n$.*

Proof. Denotemos con a al límite común de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y tomemos $\epsilon>0$ arbitrario. Por definición existen $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ tales que $x_n\in(a-\epsilon,a+\epsilon)$ para todo $n\ge n_1$ y $z_n\in(a-\epsilon,a+\epsilon)$ para todo $n\ge n_2$. Así, si $n\ge\max\{n_0,n_1,n_2\}$, entonces $a-\epsilon<x_n\le y_n\le z_n<a+\epsilon$, por lo que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $\lim y_n=a$. □

Example 3.9. Fijemos $k\in\mathbb{N}$ y consideremos la sucesión $(\sqrt[n+k]{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Como $1\le\sqrt[n+k]{n}\le\sqrt[n]{n}$ se sigue del teorema anterior y del Ejemplo 3.7 que $(\sqrt[n+k]{n})_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a 1.

4 Límites infinitos

Entre las sucesiones divergentes hay algunas que se comportan de manera particularmente buena. Las estudiaremos a continuación.

Definition 4.1. Diremos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de números reales, *tiende a* $+\infty$ y escribiremos $\lim x_n=+\infty$, si para cada $A\in\mathbb{R}$ existe $n_0\in\mathbb{N}$, tal que $x_n>A$ para todo $n\ge n_0$. Similarmente, diremos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de números reales, *tiende a* $-\infty$ y escribiremos $\lim x_n=-\infty$, si para cada $A\in\mathbb{R}$ existe $n_0\in\mathbb{N}$, tal que $x_n<A$ para todo $n\ge n_0$.

Example 4.2. La sucesión $(1,2,3,4,\dots)$ tiende a $+\infty$. Más generalmente toda sucesión creciente y no acotada de números reales tiende a $+\infty$. Por ejemplo si $a>1$, entonces la sucesión $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a $+\infty$.

Remark 4.3. Si $\lim x_n=+\infty$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada superiormente, pero si lo es inferiormente. Similarmente, Si $\lim x_n=-\infty$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no está acotada inferiormente, pero si lo está superiormente.

Remark 4.4. Toda subsucesión de una sucesión que tiende a $+\infty$, también tiende a $+\infty$. Similarmente, toda subsucesión de una sucesión que tiende a $-\infty$, también tiende a $-\infty$.

Example 4.5. Para cada $p\in\mathbb{N}$ la sucesión $(1^p,2^p,3^p,4^p,\dots)$ tiende a $+\infty$ ya que es una subsucesión de $(1,2,3,4,\dots)$.

Remark 4.6. Toda sucesión creciente que tiene una subsucesión que tiende a $+\infty$, tiende también a $+\infty$; mientras que toda sucesión decreciente que tiene una subsucesión que tiende a $-\infty$, tiende también a $-\infty$.

Example 4.7. Para cada $p \in \mathbb{N}$ la sucesión $(1^{1/p}, 2^{1/p}, 3^{1/p}, 4^{1/p}, \dots)$ es estrictamente creciente y tiene a $(1, 2, 3, 4, \dots)$ como subsucesión. Por lo tanto $(1^{1/p}, 2^{1/p}, 3^{1/p}, 4^{1/p}, \dots)$ tiende a $+\infty$.

Remark 4.8. Claramente una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a $-\infty$ si y sólo si la sucesión $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de sus opuestos, tiende a $+\infty$.

Proposition 4.9. *Para cada par $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de sucesiones de números reales, vale lo siguiente:*

(1) *Si* $\lim x_n = +\infty$ *e* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *está acotada inferiormente, entonces* $\lim(x_n + y_n) = +\infty$.
(2) *Si* $\lim x_n = -\infty$ *e* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *está acotada superiormente, entonces* $\lim(x_n + y_n) = -\infty$.
(3) *Si* $\lim x_n = +\infty$ *y existen* $n_0 \in \mathbb{N}$ *y* $a \in \mathbb{R}$ *positivo, tales que* $y_n > a$ *para todo* $n \geq n_0$, *entonces* $\lim(x_n y_n) = +\infty$.
(4) *Si* $\lim x_n = -\infty$ *y existen* $n_0 \in \mathbb{N}$ *y* $a \in \mathbb{R}$ *positivo, tales que* $y_n > a$ *para todo* $n \geq n_0$, *entonces* $\lim(x_n y_n) = -\infty$.
(5) *Si* $\lim x_n = +\infty$ *y existen* $n_0 \in \mathbb{N}$ *y* $a \in \mathbb{R}$ *negativo, tales que* $y_n < a$ *para todo* $n \geq n_0$, *entonces* $\lim(x_n y_n) = -\infty$.
(6) *Si* $\lim x_n = -\infty$ *y existen* $n_0 \in \mathbb{N}$ *y* $a \in \mathbb{R}$ *negativo, tales que* $y_n < a$ *para todo* $n \geq n_0$, *entonces* $\lim(x_n y_n) = +\infty$.
(7) *Si* $\lim x_n = +\infty$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *está acotada superiormente y existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $y_n > 0$ *para todo* $n \geq n_0$, *entonces* $\lim(x_n/y_n) = +\infty$.
(8) *Si* $\lim x_n = -\infty$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *está acotada superiormente y existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $y_n > 0$ *para todo* $n \geq n_0$, *entonces* $\lim(x_n/y_n) = -\infty$.
(9) *Si* $\lim x_n = +\infty$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *está acotada inferiormente y existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $y_n < 0$ *para todo* $n \geq n_0$, *entonces* $\lim(x_n/y_n) = -\infty$.
(10) *Si* $\lim x_n = -\infty$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *está acotada inferiormente y existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $y_n < 0$ *para todo* $n \geq n_0$, *entonces* $\lim(x_n/y_n) = +\infty$.
(11) *Si* $\lim y_n = 0$ *y si existen* $n_0 \in \mathbb{N}$ *y* $b > 0$ *tales que* $x_n > b$ *e* $y_n > 0$ *para todo* $n \geq n_0$, *entonces* $\lim(x_n/y_n) = +\infty$.
(12) *Si* $\lim y_n = 0$ *y si existen* $n_0 \in \mathbb{N}$ *y* $b > 0$ *tales que* $x_n > b$ *e* $y_n < 0$ *para todo* $n \geq n_0$, *entonces* $\lim(x_n/y_n) = -\infty$.
(13) *Si* $\lim y_n = 0$ *y si existen* $n_0 \in \mathbb{N}$ *y* $b < 0$ *tales que* $x_n < b$ *e* $y_n > 0$ *para todo* $n \geq n_0$, *entonces* $\lim(x_n/y_n) = -\infty$.
(14) *Si* $\lim y_n = 0$ *y si existen* $n_0 \in \mathbb{N}$ *y* $b < 0$ *tales que* $x_n < b$ *e* $y_n < 0$ *para todo* $n \geq n_0$, *entonces* $\lim(x_n/y_n) = +\infty$.
(15) *Si* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *está acotada y* $\lim |y_n| = +\infty$, *entonces* $\lim(x_n/y_n) = 0$.

Proof. (1) Denotemos con B a una cota inferior de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y tomemos $A \in \mathbb{R}$ arbitrario. Por hipótesis existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > A - B$ para todo $n \geq n_0$. Así $x_n + y_n > A - B + B = A$ para todo $n \geq n_0$. Como esto vale para A arbitrario, $\lim(x_n + y_n) = +\infty$.

(2) Se sigue de las Notas 1.4 y 4.8 y del item (1) aplicado a las sucesiones $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(-y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(3) Tomemos $A \in \mathbb{R}$ arbitrario. Por hipótesis existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > A/a$ para todo $n \geq n_0$. Así $x_n y_n > (A/a)a = A$ para todo $n \geq n_0$. Como esto vale para A arbitrario, $\lim(x_n y_n) = +\infty$.

(4) Se sigue de la Nota 4.8 y del item (3) aplicado a las sucesiones $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(5) Se sigue de la Nota 1.4 y del item (3) aplicado a las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(-y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(6) Se sigue de las Notas 1.4 y 4.8 y del item (3) aplicado a las sucesiones $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(-y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(7) Se sigue de la Proposición 1.5 y del item (3) aplicado a las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(1/y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(8) Se sigue de la Nota 4.8 y del item (7) aplicado a las sucesiones $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(9) Se sigue de las Notas 1.4 y 4.8 y del item (7) aplicado a las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(-y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(10) Se sigue de las Notas 1.4 y 4.8 y del item (7) aplicado a las sucesiones $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(-y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(11) Tomemos $A \in \mathbb{R}$ positivo arbitrario. Por hipótesis existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $y_n < b/A$ para todo $n \geq n_1$. Así, si $n \geq \max\{n_0, n_1\}$, entonces $x_n/y_n > (A/b)b = A$. Como esto vale para A positivo arbitrario, $\lim(x_n/y_n) = +\infty$.
(12) Se sigue de la Nota 4.8 y del item (11) aplicado a las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(-y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(13) Se sigue de las Notas 1.4 y 4.8 y del item (11) aplicado a las sucesiones $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(14) Se sigue de la Nota 1.4 y del item (11) aplicado a las sucesiones $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(-y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(15) Denotemos con A a una cota superior positiva de $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ y tomemos $B \in \mathbb{R}$ arbitrario. Por hipótesis existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n| > A/B$ para todo $n \geq n_0$. Así $|x_n/y_n| < A(B/A) = B$ para todo $n \geq n_0$. Como esto vale para B arbitrario, $\lim(x_n/y_n) = 0$. □

5 Puntos de adherencia

Un punto $a \in \mathbb{R}$ es *valor de adherencia* de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales si es el límite de alguna subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Example 5.1. Por la Proposition 2.4 Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $\lim x_n = a$, entonces a es el único punto de adherencia de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Example 5.2. La sucesión $(0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \dots)$ tiene a 0 como único punto de adherencia, pero no converge.

Example 5.3. Las sucesiones $(1, 2, 3, 4, \dots)$ y $(1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots)$ no tienen ningún punto de adherencia.

Theorem 5.4. *Consideremos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales y un punto $a \in \mathbb{R}$. Son equivalentes:*

(1) *En punto a es valor de adherencia de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
(2) *Para cada $\epsilon > 0$ el conjunto de los $n \in \mathbb{N}$ tales que $x_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$ es infinito.*

Proof. (1) ⇒ (2) Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ es una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a a. Entonces para cada $\epsilon > 0$ existe $n'_0 \in \mathbb{N}'$ tal que $x_{n'} \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$ para cada $n' \geq n'_0$ con $n' \in \mathbb{N}'$. Como este conjunto es infinito el item (2) vale.
(2) ⇒ (1) Definimos recursivamente un conjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < n_3 < \dots\}$, de $\mathbb{N}$, tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ converge a a, de la siguiente manera. Supongamos que hemos definido $n_1 < \dots < n_i$ tales que $n_j \in (a - 1/j, a + 1/j)$. Como $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in (a - 1/(i+1), a + 1/(i+1))\}$ es infinito, podemos tomar n_{i+1} tal que $n_i < n_{i+1}$ y $x_{n_{i+1}} \in (a - 1/(i+1), a + 1/(i+1))$. Es evidente que $a = \lim x_{n_i}$, como queremos. □

Example 5.5. Cualquiera sea $a \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$ el intervalo $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ tiene infinitos números racionales. Por lo tanto, debido al teorema anterior, todo número real es punto de adherencia de cualquier enumeración $(r_1, r_2, r_3, \dots)$ del conjunto de los números racionales.

Corollary 5.6. *El conjunto de los puntos de adherencia de una sucesión de números reales es un cerrado.*

Proof. Consideremos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales y denotemos con A al conjunto de sus puntos de adherencia. Tomemos $a \in \overline{A}$. Para cada $\epsilon > 0$ el intervalo $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ corta a A. Tomemos $b \in A \cap (a-\epsilon, a+\epsilon)$ y escribamos $\epsilon' := \min\{b-a+\epsilon, a+\epsilon-b\}$. Es claro que $\epsilon' > 0$ y que $(b-\epsilon', b+\epsilon') \subseteq (a-\epsilon, a+\epsilon)$. Como $b \in A$, se sigue de esta inclusión y del Teorema 5.4 que el conjunto de los $n \in \mathbb{N}$ tales que $x_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$ es infinito. Por lo tanto, nuevamente debido al Teorema 5.4, a es un punto de adherencia de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Consideremos el conjunto $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, donde $-\infty$ y $+\infty$ son dos puntos no reales distintos. Extendemos el orden de $\mathbb{R}$ a $\overline{\mathbb{R}}$ poniendo $-\infty < a < +\infty$ para todo $a \in \mathbb{R}$. En $\overline{\mathbb{R}}$ todo conjunto tiene ínfimo y supremo. En efecto

- Si $A = \emptyset$, entonces $\inf A = +\infty$ y $\sup A = -\infty$.
- Si A no está acotado superiormente por ningún elemento de $\mathbb{R}$, entonces $\sup A = +\infty$.
- Si A está acotado superiormente por algún elemento de $\mathbb{R}$, entonces el supremo de A en $\overline{\mathbb{R}}$ es el supremo de A en $\mathbb{R}$.
- Si A no está acotado inferiormente por ningún elemento de $\mathbb{R}$, entonces $\inf A = -\infty$.
- Si A está acotado inferiormente por algún elemento de $\mathbb{R}$, entonces el ínfimo de A en $\overline{\mathbb{R}}$ es el ínfimo de A en $\mathbb{R}$.

Dada una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales escribamos $X_n := \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$ y denotemos con a_n al ínfimo de X_n y con b_n al supremo de X_n. Entonces

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_n \le \cdots \le b_n \le \cdots \le b_3 \le b_2 \le b_1. \tag{5.1}$$

En lo que sigue de esta sección usaremos las notaciones X_n, a_n y b_n libremente. Es claro que

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ no está acotada inferiormente } \Leftrightarrow a_1 = -\infty \Leftrightarrow a_n = -\infty \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

y que

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ no está acotada superiormente } \Leftrightarrow b_1 = +\infty \Leftrightarrow b_n = +\infty \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Además $a_n < +\infty$ y $-\infty < b_n$ para todo n. Definimos el *límite inferior* y el *límite superior* de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por

$$\liminf x_n := \begin{cases} -\infty & \text{si } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ no está acotada inferiormente,} \\ \lim a_n & \text{si } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ está acotada inferiormente,} \end{cases}$$

y

$$\limsup x_n := \begin{cases} +\infty & \text{si } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ no está acotada superiormente,} \\ \lim b_n & \text{si } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ está acotada superiormente,} \end{cases}$$

respectivamente.

Proposition 5.7. *Para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de números reales, vale lo siguiente:*

(1) $\liminf x_n = -\infty$ *si y sólo si* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *no está acotada inferiormente.*
(2) $\limsup x_n = +\infty$ *si y sólo si* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *no está acotada superiormente.*
(3) $\liminf x_n \le \limsup x_n$.
(4) $\liminf x_n = +\infty$ *si y sólo si* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tiende a* $+\infty$.
(5) $\limsup x_n = -\infty$ *si y sólo si* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tiende a* $-\infty$.

Proof. (1) Es evidente que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no está acotada inferiormente, entonces $\liminf x_n = -\infty$. Supongamos ahora que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada inferiormente. Entonces $a_1 \le a_2 \le \dots$ son números reales, por lo que $\liminf x_n = \lim a_n > -\infty$.

(2) Es evidente que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no está acotada superiormente, entonces $\limsup x_n = -\infty$. Supongamos ahora que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada superiormente. Entonces $b_1 \geq b_2 \geq \dots$ son números reales, por lo que $\limsup x_n = \lim b_n < +\infty$.

(3) Si $\liminf x_n = -\infty$ o $\limsup x_n = +\infty$ es evidente que $\liminf x_n \leq \limsup x_n$. Supongamos ahora que $\liminf x_n > -\infty$ y $\limsup x_n < +\infty$. Entonces, debido a los items (1) y (2), la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada superior e inferiormente y así, por definición, $\liminf x_n = \lim a_n$ y $\limsup x_n = \lim b_n$. Así, por las desigualdades (5.1),

$$\liminf x_n = \lim a_n \leq b_m \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N},$$

por lo que $\liminf x_n \leq \lim b_m = \limsup x_n$.

(4) Supongamos que $\liminf x_n = +\infty$. Por el item (1) la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada inferiormente y así, por definición, $\lim a_n = \liminf x_n = +\infty$. Debido a la definición de los a_n's, se sigue de esto que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a $+\infty$. Recíprocamente supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a $+\infty$. Entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada inferiormente y además, nuevamente debido a la definición de los a_n's, la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a $+\infty$. En consecuencia, $\liminf x_n = \lim a_n = +\infty$.

(5) Supongamos que $\limsup x_n = -\infty$. Por el item (2) la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada superiormente y así, por definición, $\lim b_n = \limsup x_n = -\infty$. Debido a la definición de los b_n's, se sigue de esto que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a $-\infty$. Recíprocamente supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a $-\infty$. Entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada superiormente y además, nuevamente debido a la definición de los b_n's, la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a $-\infty$. En consecuencia, $\limsup x_n = \lim b_n = -\infty$. □

Corollary 5.8. *Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales está acotada superior e inferiormente si y sólo si $-\infty < \liminf x_n \leq \limsup x_n < +\infty$.*

Proof. Por los items (1), (2) y (3) del teorema anterior. □

Theorem 5.9. *Consideremos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Las siguientes afirmaciones valen:*

(1) $\liminf x_n = \min\{a \in \overline{\mathbb{R}} : a$ *es el límite de una subsucesión de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$.

(2) $\limsup x_n = \max\{a \in \overline{\mathbb{R}} : a$ *es el límite de una subsucesión de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$.

Proof. (1) Supongamos primero que $\liminf x_n = -\infty$. Entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no está acotada inferiormente. Vamos a construír una subsucesión $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $x_{n_j} < -j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Es evidente que entonces tendremos que $\lim x_{n_i} = -\infty$. Como la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no está acotada inferiormente existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_1} < -1$. Supongamos que hemos elejido $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_i$ tales que $x_{n_j} < -j$ para todo $1 \leq j \leq i$. Dado que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ no esá acotado inferiormente, tampoco $\{x_n : n \in \mathbb{N}$ y $n > n_i\}$ lo está. Por lo tanto existe $n_{i+1} > n_i$ tal que $x_{n_{i+1}} < -i-1$. Esto termina la construcción de $\mathbb{N}'$ por recurrencia. Supongamos ahora que $\liminf x_n = a \in \mathbb{R}$. Dado que esto implica que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada inferiormente, ninguna subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puede tender a $-\infty$. Veamos que tampoco para ningún $b < a$ en $\mathbb{R}$ existe una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a b. Tomemos $b < a$ en $\mathbb{R}$ arbitrario y escribamos $\epsilon := (a-b)/2$. Como $\lim a_n = a$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > a - \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Dado que $a_{n_0} = \inf X_{n_0}$, esto implica en particular que $x_n > a-\epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Como $b+\epsilon = a-\epsilon$ se sigue de esto que $x_n > b+\epsilon$ para todo $n \geq n_0$, por lo que ninguna subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puede tender a b. Veremos a continuación que hay una subsucesión $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que converge a a. Vamos a construír $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \dots$ de manera que $a - 1/i < x_{n_i} < a + 1/i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Es evidente que entonces tendremos que $\lim x_{n_i} = a$. Como $\lim a_n = a$ existe n'_1 tal que $a - 1 < a_n \leq a$ para todo $n \geq n'_1$. Dado que $a_{n'_1} = \inf X_{n'_1}$, esto implica en particular que existe $n_1 \geq n'_1$ en $\mathbb{N}$, tal que $a - 1 < a_{n'_1} \leq x_{n_1} < a + 1$. Supongamos que hemos elejido $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_i$, tales que $a - 1/j < x_{n_j} < a + 1/j$ para todo $1 \leq j \leq i$. Como $\lim a_n = a$ existe $n'_{i+1} \in \mathbb{N}$, tal que $a - 1/(i+1) < a_n \leq a$ para todo $n \geq n'_{i+1}$. Puesto que

$a_{n'_{i+1}} = \inf X_{n'_{i+1}}$, esto implica en particular que existe $n_{i+1} \geq \max\{n'_{i+1}, n_i\}$ en $\mathbb{N}$, tal que $a - 1/(i+1) < a_{n'_{i+1}} \leq x_{n_{1+1}} < a + 1/(i+1)$. Supongamos finalmente que $\liminf x_n = +\infty$. Sabemos que entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a $+\infty$. Por la Nota 4.4 esto termina la demostración.

(2) Copie la demostración de (1). □

Corollary 5.10 (Teorema de Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sucesión acotada de números reales tiene una subsucesión convergente.*

Proof. Esto se sigue inmediatamente del teorema anterior y de que, por el Corolario 5.8, si una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, entonces $-\infty < \liminf x_n \leq \limsup x_n < +\infty$. □

Remark 5.11. En la prueba del item (1) del teorema anterior vimos que si $\liminf x_n = a \in \mathbb{R}$, entonces dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \epsilon < x_n$ para todo $n \geq n_0$. Por otro lado, como hay una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a a, cualquiera sea $\epsilon > 0$ hay infinitos índices n tales que $a \leq x_n < a + \epsilon$. Similarmente si $\limsup x_n = b \in \mathbb{R}$, entonces dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < a + \epsilon$ para todo $n \geq n_0$, mientras que, por otro lado, hay infinitos índices n tales que $a - \epsilon < x_n$.

Remark 5.12. Consideremos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales. Por la Proposición 2.4, el Remark 4.4 y el Teorema 5.9, si $\liminf x_n < \limsup x_n$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge ni tampoco tiende a $+\infty$ o $-\infty$. Por otro lado, por los items (4) y (5) de la Proposición 5.7, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a $-\infty$, entonces $\liminf x_n = \limsup x_n = -\infty$, mientras que, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a $+\infty$, entonces $\liminf x_n = \limsup x_n = +\infty$. Afirmamos que si $\liminf x_n = \limsup x_n = a \in \mathbb{R}$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a. Por definición sabemos que $a = \lim a_n = \lim b_n$. Así, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \epsilon < a_n \leq b_n < a + \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Debido a las definiciones de a_n y de b_n se sigue de esto que $a - \epsilon < a_n \leq x_n \leq b_n < a + \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto $\lim x_n = a$ como queremos.

El teorema de Bolzano-Weierstrass se sigue también del Teorema 2.11 y del siguiente resultado interesante en si mismo.

Proposition 5.13. *Toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales tiene una subsucesión monótona.*

Proof. Decimos que x_n es un término destacado de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $x_n \geq x_m$ para todo $m > n$. Denotemos con $\mathbb{N}'$ al conjunto de los índices $n \in \mathbb{N}$ tales que x_n es un término destacado de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si $\mathbb{N}'$ es infinito, entonces la subsucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente. Por otra parte, si $\mathbb{N}'$ es finito, entonces tiene máximo y $n_1 \coloneqq 1 + \max \mathbb{N}'$ no está en $\mathbb{N}'$. En consecuencia, existe $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_1} < x_{n_2}$. A su vez n_2 tampoco está en $\mathbb{N}'$ y, por lo tanto, existe $n_3 > n_2$ tal que $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3}$. Prosiguiendo de esta manera obtenemos una subsucesión estrictamente creciente de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

La siguiente proposición y su corolario son muy útiles.

Lemma 5.14. *Consideremos dos sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales. Supongamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq y_n$ para todo $n \geq n_0$. Entonces*

$$\liminf x_n \leq \liminf y_n \quad y \quad \limsup x_n \leq \limsup y_n. \tag{5.2}$$

Proof. Escribamos $a_n \coloneqq \inf X_n$, $b_n \coloneqq \sup X_n$, $c_n \coloneqq \inf Y_n$, $d_n \coloneqq \sup Y_n$, donde

$$X_n \coloneqq \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} \quad \text{y} \quad Y_n \coloneqq \{y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \dots\}.$$

Afirmamos que

$$a_n \leq c_n \quad \text{y} \quad b_n \leq d_n \qquad \text{para todo } n \geq n_0. \tag{5.3}$$

En efecto, dado que $a_n = \inf X_n$, $d_n = \sup X_n$ y $n \geq n_0$,

$$a_n \leq x_m \leq y_m \quad \text{y} \quad x_m \leq y_m \leq d_n \qquad \text{para todo } m \geq n.$$

En consecuencia a_n es una cota inferior de Y_n y d_n es una cota superior de X_n, de donde las desigualdades (5.3) se siguen inmediatamente. Es claro ahora que las desigualdades (5.2) valen. □

Proposition 5.15. *Para toda sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de números positivos,*

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf \sqrt[n]{a_n} \le \limsup \sqrt[n]{a_n} \le \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Proof. Veamos primero que $\limsup \sqrt[n]{a_n} \le \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Supongamos que esto es falso. Entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < c < \limsup \sqrt[n]{a_n}. \tag{5.4}$$

Por la primera de estas desigualdades existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{a_{n+1}}{a_n} < c$ para todo $n \ge n_0$. Así,

$$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} < c, \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} < c, \dots, \frac{a_n}{a_{n-1}} < c \qquad \text{para todo } n > n_0.$$

Multiplicanto miembro a miembro estas $n - n_0$ desigualdades, obtenemos $a_n/a_{n_0} < c^{n-n_0}$. Por lo tanto $a_n < kc^n$ para todo $n \ge n_0$, donde $k := a_{n_0}/c^{n_0}$. Así, dado que $\lim \sqrt[n]{k} = 1$,

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \le \limsup \sqrt[n]{k}c = c.$$

Como esto se contradice con (5.4), necesariamente $\limsup \sqrt[n]{a_n} \le \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Veamos ahora que $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf \sqrt[n]{a_n}$. Supongamos que esto es falso. Entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\liminf \sqrt[n]{a_n} < c < \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}. \tag{5.5}$$

Por la segunda de estas desigualdades existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $c < \frac{a_{n+1}}{a_n}$ para todo $n \ge n_0$. Así

$$c < \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}, c < \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}}, \dots, c < \frac{a_n}{a_{n-1}} \qquad \text{para todo } n > n_0.$$

Multiplicanto miembro a miembro estas $n - n_0$ desigualdades, obtenemos $c^{n-n_0} < a_n/a_{n_0}$. Por lo tanto $kc^n < a_n$ para todo $n \ge n_0$, donde $k := a_{n_0}/c^{n_0}$. Así, por el Lema 5.14,

$$c = \lim \sqrt[n]{k}c = \limsup \sqrt[n]{k}c \le \liminf \sqrt[n]{a_n},$$

donde la primera igualdad vale por el Ejemplo 3.5, la segunda igualdad vale por la Nota 5.12, y la desigualdad vale por el Lema 5.14. Puesto que esto se contradice con (5.5), necesariamente $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf \sqrt[n]{a_n}$. □

Corollary 5.16. *Consideremos una sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de números positivos. Si existe* $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$, *entonces existe también* $\lim \sqrt[n]{a_n}$ *y* $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Example 5.17. Fijemos dos números reales positivos $a < b$ y consideremos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definida recursivamente por $x_1 := a$, $x_{2n} := x_{2n-1}b$ para $n \in \mathbb{N}$ y $x_{2n+1} := x_{2n}a$ para $n \in \mathbb{N}$. Así $x_1 = a$, $x_2 = ab$, $x_3 = a^2b$, $x_4 = a^2b^2$, $x_5 = a^3b^2$, $x_6 = a^3b^3$, etcetera. En consecuencia $\frac{x_{2n}}{x_{2n-1}} = a$ y $\frac{x_{2n+1}}{x_{2n}} = b$, de modo que no existe el límite de $\frac{x_{n+1}}{x_n}$. Por otro lado como

$$\sqrt[2n]{x_{2n}} = \sqrt[2n]{a^n b^n} = \sqrt{a}\sqrt{b} \qquad \text{y} \qquad \sqrt[2n+1]{x_{2n+1}} = \sqrt[2n+1]{a^{n+1}b^n} = a^{\frac{n+1}{2n+1}} b^{\frac{n}{2n+1}},$$

la sucesión $\sqrt[n]{x_n}$ tiende a $\sqrt{ab}$.

Example 5.18. El resultado obtenido en el Ejemplo 3.7 se puede obtener fácilmente usando el Corolario 5.16.

Example 5.19. Como $\lim \frac{(n+1)!}{n!} = \lim(n+1) = +\infty$ también $\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

Example 5.20. Afirmamos que $\lim \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$. En efecto, esto se sigue del Corolario 5.16 y de que

$$\lim \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n} = \lim \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

6 Sucesiones de Cauchy

Definition 6.1. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales es *de Cauchy* si para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \epsilon$ para todo $m, n \geq n_0$.

Theorem 6.2. *Toda sucesión convergente es de Cauchy.*

Proof. Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente de números reales y denotemos con a a su límite. Por definición dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $|x_n - x_{n_0}| < \epsilon/2$ para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto,

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |a - x_m| < \epsilon \quad \text{para todo } m, n \geq n_0.$$

Así, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. □

Vamos a ver que vale la recíproca del teorema anterior. Para ello necesitaremos los sigiuentes dos lemas.

Lemma 6.3. *Toda sucesión de Cauchy es acotada.*

Proof. Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Por hipótesis existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \epsilon$ para todo $m, n \geq n_0$. En particular $x_n \in (x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1)$ para todo $n \geq n_0$, por lo que evidentemente, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada. □

Lemma 6.4. *Toda sucesión de Cauchy que tiene una subsucesión convergente es convergente.*

Proof. Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ es una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a un punto a. Tomemos $\epsilon > 0$ arbitrario. Por hipótesis existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \epsilon/2$ para todo $m, n \geq n_0$ y existe $n_1 \in \mathbb{N}'$ tal que $|x_m - a| < \epsilon/2$ para todo $m \geq n_1$ con $m \in \mathbb{N}'$. Fijemos $n \geq n_0$ y tomemos $m \in \mathbb{N}'$ tal que $m \geq \max\{n_0, n_1\}$. Entonces

$$|x_n - a| = |x_n - x_m| + |x_m - a| < \epsilon,$$

por lo que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a a. □

Theorem 6.5. *Toda sucesión de Cauchy es convergente.*

Proof. Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Por el Lema 6.3 la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada. Así, por el teorema de Bolzano-Weierstrass tiene una subsucesión convergente. Se sigue ahora del Lema 6.4, que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. □

Example 6.6. Consideremos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales. Si existe $0 \leq \lambda < 1$ tal que $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \lambda|x_{n+1} - x_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y, por lo tanto, convergente. En efecto

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \lambda|x_n - x_{n-1}| \leq \lambda^2|x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \cdots \leq \lambda^{n-1}|x_2 - x_1|$$

y, por lo tanto, para cada $n, p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq (\lambda^{n+p-2} + \cdots + \lambda^{n-1})|x_2 - x_1| \\ &= \lambda^{n-1}(\lambda^{p-1} + \lambda^{p-2} \cdots + \lambda + 1)|x_2 - x_1| \end{aligned}$$

$$= \lambda^{n-1}\frac{1-\lambda^p}{1-\lambda}$$
$$< \frac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{\lambda-1} = 0$, dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $|x_{n+p} - x_n| < \epsilon$, para todo $n \geq n_0$ y todo $p \in \mathbb{N}$, lo que muestra que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Example 6.7. Fijemos $a, c > 0$ y definamos la sucesión de números reales positivos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ recursivamente por $x_1 \coloneqq c$ y $x_{n+1} \coloneqq \frac{1}{2}\bigl(x_n + \frac{a}{x_n}\bigr)$ para $n > 1$. Afirmamos que

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n| \qquad \text{para todo } n \geq 1. \tag{6.6}$$

Con el proposito de ver esto calculamos

$$x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n) + \frac{a}{2}\Bigl(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}\Bigr) = \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n) + \frac{a}{2}\Bigl(\frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}x_n}\Bigr). \tag{6.7}$$

De esto se sigue inmediatamente que si $x_{n+1} = x_n$, entonces $x_{n+2} = x_{n+1}$ y, por lo tanto, en este caso, la desigualdad (6.6) es clara. Supongamos ahora que $x_{n+1} \neq x_n$. En ese caso, de la igualdad (6.7) se sigue que,

$$\left|\frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n}\right| = \frac{1}{2}\left|1 - \frac{a}{x_{n+1}x_n}\right|$$

y así, para terminar de probar la desigualdad (6.6) será suficiente ver que $a \leq x_n x_{n+1}$. Pero esto vale, pues, debido a que la media geométrica de dos números es menor o igual que su media aritmética,

$$\sqrt{a} = \sqrt{x_n \frac{a}{x_n}} \leq \frac{1}{2}\Bigl(x_n + \frac{a}{x_n}\Bigr) = x_{n+1},$$

para todo $n \geq 1$. En consecuencia, por el ejemplo anterior la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Denotemos con b a su límite. Como $2x_{n+1}x_n = x_n^2 + a$ tomando límite en esta igualdad obtenemos que $b^2 = a$.

7 Series

Dada una sucesión de números reales $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, podemos formar una nueva sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, llamada *serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, poniendo $s_1 \coloneqq a_1$ y $s_{n+1} \coloneqq s_n + a_{n+1}$. Así, $s_2 = a_1 + a_2$, etcetera. A a_n se lo llama el n-ésimo término de la serie $\sum a_n$. Cuando la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un número real s, decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge* a s. En este caso decimos también que s es la *suma de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y escribimos $s = \sum_{n=1}^{\infty} s_n$. En caso contrario decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge*. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tiende a $+\infty$ escribiremos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ y, similarmente, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tiende a $-\infty$ escribiremos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$. A veces aparecen naturalmente series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, que comienzan en 0. Esto no agrega nada, pues el cambio de índice $y_n \coloneqq x_{n-1}$ las convierte en series $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, que comienzan en 1. También resulta cómodo considerar series $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, que comienzan en un entero n_0. Cuando n_0 es un número natural podemos considerarlas como series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con el símple trámite de definir $a_1 = \cdots = a_{n_0-1} = 0$. Cuando no haya peligro de confusión escribiremos $\sum a_n$ en lugar de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (o de $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$). Notemos que la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de las sumas parciales de $\sum a_n$, es creciente si y sólo si $a_n \geq 0$ para todo n; y que la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de las sumas parciales de $\sum a_n$, es estrictamente creciente si y sólo si $a_n > 0$ para todo n. Por lo tanto una serie $\sum a_n$ de términos no negativos converge si y sólo si el conjunto $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado y $\sum a_n = \sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Example 7.1. Tomemos $a \in \mathbb{R}$ arbitrario. La serie geométrica de razón a es por definición la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$. La n-ésima suma parcial de esta serie es

$$s_n := 1 + \cdots + a^n = \begin{cases} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} & \text{si } a \neq 1, \\ n+1 & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

Así la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ converge si y sólo si $|a| < 1$ y, en este caso, $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.

Theorem 7.2. *Si* $\sum a_n$ *converge, entonces* $\lim a_n = 0$.

Proof. Como arriba escribamos $s_n := a_1 + \cdots + a_n$ y denotemos con s a la suma de la serie $\sum a_n$. Por definición $\lim s_n = \lim s_{n-1} = s$. Como $a_n = s_n - s_{n-1}$,

$$\lim a_n = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0,$$

como queremos. □

Example 7.3. No es necesario calsular la n-ésima suma parcial para ver que cuando $|a| \geq 1$ la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ diverge. Esto se sigue inmediatamente de que si $|a| \geq 0$, entonces a^n no tiende a cero.

Example 7.4. La recíproca del teorema anterior no vale pues, por ejemplo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, llamada *serie armónica* tiende a $+\infty$, debido a que sus términos son positivos y

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\Big) > 1 + \frac{n}{2}.$$

Remark 7.5. De las propiedades aritméticas de las sucesiones se sigue que si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son convergentes, entonces $\sum(a_n + b_n)$ es convergente y $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$; y que si $\sum a_n$ es convergente, entonces para cada $r \in \mathbb{R}$ la serie $\sum r a_n$ es convergente y $\sum r a_n = r \sum a_n$. Finalmente, si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son convergentes y escribimos $s_n := a_1 + \cdots + a_n$ y $t_n := b_1 + \cdots + b_n$, entonces $\sum a_n \sum b_n = \lim s_n t_n = \lim \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j$ y, por lo tanto, la serie $\sum c_n$, definida poniendo $c_n := a_1 b_n + \cdots + a_n b_n + a_n b_1 + \cdots + a_n b_{n-1}$, converge y $\sum c_n = \sum a_n \sum b_n$.

Remark 7.6. Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge (donde $n_0 \in \mathbb{N}$ es arbitrario) lo hace. En efecto, si las sumas parciales de la primera serie son $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ las de la segunda son $(t_n)_{n\geq n_0}$, donde $t_n := s_n - s_{n_0-1}$.

Proposition 7.7. *Consideremos series* $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *de términos no negativos. Si* $\sum b_n$ *converge y existen* $c > 0$ *y* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tales que* $a_n \leq c b_n$ *para todo* $n \geq n_0$*, entonces* $\sum a_n$ *converge.*

Proof. Por el remark anterior podemos considerar que $n_0 = 0$. Escribamos $s_n := a_1 + \cdots + a_n$ y $t_n := b_1 + \cdots + b_n$. Como $\sum b_n$ converge el conjunto $\{t_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado superiormente. Dado que por hipótesis $s_n = a_1 + \cdots + a_n \leq c b_1 + \cdots + c b_n = c t_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ también está acotado superiormente y, así, $\sum a_n = \sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\} < \infty$. □

Example 7.8. Para cada $0 < r < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ diverge. En efecto, por la proposición anterior, esto se sigue de que la serie armónica diverge y de que $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^r}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Example 7.9. Para cada $r > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ converge. En efecto, como sus términos son positivos, para ver esto es suficiente probar que la subsucesión $(s_{2^n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sus sumas parciales, está acotada. Pero esto es así, pues

$$s_{2^n-1} = 1 + \Big(\frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r}\Big) + \Big(\frac{1}{4^r} + \frac{1}{5^r} + \frac{1}{6^r} + \frac{1}{7^r}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{2^{(n-1)r}} + \cdots + \frac{1}{(2^n-1)^r}\Big),$$

y, por lo tanto,

$$s_{2^n-1} < \sum_{i=0}^{n-1} \Big(\frac{2}{2^r}\Big)^i = \frac{1 - \big(2/2^r\big)^n}{1 - 2/2^r} < \frac{2^r}{2^r - 2},$$

lo que muestra en particular que la subsucesión $(s_{2^n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, es acotada.

Theorem 7.10 (Criterio de Cauchy)**.** *Una serie* $\sum a_n$ *es convergente si y sólo si para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon$ *para todo* $n \geq n_0$ *y todo* $p \in \mathbb{N}$.

Proof. La hipótesis de la segunda parte del enunciado dice simplemente que la sucesión $(s_n)_{n\in N}$, de las sumas parciales de la serie $\sum a_n$, es de Cauchy. Por lo tanto el Teorema 7.10 se sigue inmediatamente de los Teoremas 6.2 y 6.5. □

Definition 7.11. Una serie $\sum a_n$ es *absolutamente convergente* si la serie $\sum |a_n|$ es convergente.

Proposition 7.12. *Toda serie absolutamente convergente es convergente.*

Proof. supongamos que $\sum a_n$ es una serie absolutamente convergente. Por el teorema anterior dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$ y todo $p \in \mathbb{N}$. Por lo tanto

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_n| + \cdots + |a_{n+p}| < \epsilon \qquad \text{para todo } n \geq n_0 \text{ y todo } p \in N.$$

En consecuencia, debido nuevamente al teorema anterior, la serie $\sum a_n$ es convergente. □

No toda serie convergente es absolutamente convergente. Por ejemplo la serie $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ es convergente pero no absolutamente convergente. Ya sabemos que la serie $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ no es abssolutamente convergente. El siguiente resultado prueba que es covergente.

Theorem 7.13 (Leibniz)**.** *Si* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una suceción decreciente de números no negativos y si* $\lim a_n = 0$*, entonces la serie* $\sum(-1)^{n+1}a_n$*, converge.*

Proof. Escribamos $s_n := a_1 - a_2 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n$. Como

$$s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n}, \quad s_{2n+3} = s_{2n+1} - a_{2n+2} + a_{2n} \quad \text{y} \quad s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$$

y la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente,

$$s_2 \leq s_4 \leq \cdots \leq s_{2n} \leq \cdots \leq s_{2n-1} \leq \cdots \leq s_3 \leq s_1.$$

Por lo tanto $\lim s_{2n}$ y $\lim s_{2n+1}$ existen y $\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n} + \lim a_{2n+1} = \lim s_{2n}$. □

Remark 7.14. Notemos que si $s = \sum(-1)^{n+1}a_n$, entonces

$$s_{2n} \leq s \leq s_{2n+1}, \quad s - s_{2n} \leq s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \quad \text{y} \quad s_{2n+1} - s \leq s_{2n+1} - s_{2n+2} = a_{2n+2}.$$

lo que da una manera de acotar la diferencia entre s y una suma parcial de la serie $\sum(-1)^{n+1}a_n$.

Definition 7.15. Una serie es *condicionalmente convergente* si es convergente pero no absolutamente convergente.

Proposition 7.16 (Criterio de Cauchy)**.** *Si* $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$*, entonces* $\sum a_n$ *converge absolutamente.*

Proof. Tomemos $b \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq \limsup |a_n| < b < 1$. Sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|} < b$ para todo $n \geq n_0$. Pero entonces $|a_n| < b^n$ para todo $n \geq n_0$. Dado que, por el Ejemplo 7.1 la serie $\sum b^n$ converge, se sigue de la Proposición 7.7 que $\sum |a_n|$ también lo hace. □

Proposition 7.17 (Criterio de a'Alambert)**.** *Supongamos que* $(a_n)_{n\in N}$ *es una sucesión de términos no nulos. Si* $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$*, entonces* $\sum a_n$ *converge absolutamente.*

Proof. De la Proposición 5.15 se sigue que $0 \leq \limsup |a_n| \leq \limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$. En consecuencia, debido a la Proposición 7.16, la serie $\sum a_n$ converge absolutamente. □

Example 7.18. Para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $a > 1$ en $\mathbb{R}$, la serie $\sum \frac{n^k}{a^n}$ converge. En efecto, si escribimos $x_n := \frac{n^k}{a^n}$, entonces

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^k}{a^{n+1}} \frac{a^n}{n^k} = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^k a^{-1},$$

que tiende a a^{-1}, que es menor que 1, pues $a > 1$. En consecuencia $\lim \frac{n^k}{a^n} = 0$.

Example 7.19. Para cada $a \in \mathbb{R}$, la serie $\sum \frac{a^n}{n!}$ converge. En efecto, si escribimos $x_n := \frac{a^n}{n!}$, entonces

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1},$$

que tiende a 0. En consecuencia $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$.

Example 7.20. La serie $\sum \frac{n!}{n^n}$ converge, ya que si escribimos $x_n := \frac{n!}{n^n}$, entonces

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n,$$

que tiende a $e^{-1} < 1$. En consecuencia $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$.

Theorem 7.21 (Dirichlet)**.** *Consideremos sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de las sumas parciales $s_n := a_1 + \cdots + a_n$, de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, es acotada, $\sum_{n\in\mathbb{N}} |b_{n+1} - b_n| < \infty$ y $\lim b_n = 0$, entonces la serie $\sum a_n b_n$ converge y $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n(b_n - b_{n+1})$.*

Proof. Un argumento inductivo sencillo muestra que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_n b_n.$$

En consecuencia, dado que $\lim s_n b_n = 0$, para terminar la demostración será suficiente ver que la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} s_n(b_n - b_{n+1})$ converge absolutamente. Pero esto es así, pues si M es una cota superior de $\{|s_n| : n \in \mathbb{N}\}$, entonces

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |s_n(b_n - b_{n+1})| \le M \sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n - b_{n+1}| < \infty,$$

como queremos. □

Remark 7.22. La condición $\sum_{n\in\mathbb{N}} |b_{n+1} - b_n| < \infty$ se satisface trivialmente si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona.

Remark 7.23. Tomando $a_n := (-1)^{n+1}$ y una suceción decreciente $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim b_n = 0$, obtenemos el teorema de Leibniz.

Corollary 7.24 (Abel)**.** *Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ es una serie convergente y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de número positivos, entonces la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ converge.*

Proof. Denotemos con b al límite de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Por el teorema de Dirichlet la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(b_n - b)$ converge. En consecuencia, dado que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(b_n - b) + b \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n,$$

también la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ lo hace. □

Example 7.25. Para cada $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ las series $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sin nx}{n}$ y $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos nx}{n}$ convergen. En efecto, por el teorema de Dirichlet sólo debemos ver que la sumas

$$s_n := \sin x + \cdots + \sin nx \qquad \text{y} \qquad t_n := \cos x + \cdots + \cos nx$$

están acotadas. Pero esto se sigue inmediatamente de que

$$t_n + is_n = \sum_{j=1}^{n} (\cos jx + i \sin jx) = \sum_{j=1}^{n} e^{ijx} = \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1}$$

y, por lo tanto,

$$|t_n + is_n| = \frac{|e^{i(n+1)x} - 1|}{|e^{ix} - 1|} \leq \frac{2}{|e^{ix} - 1|}.$$

8 Reordenamiento de series

Consideremos dos series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ de númerios reales. Decimos que $\sum b_n$ es obtenida a partir de $\sum a_n$ por *reordenación de sus términos* si existe una biyección $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $b_n = a_{\varphi(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Queremos ver bajo que condiciones la suma de una serie coincide con la de cualquiera de sus reordenamientos. Comencemos con la siguiente definición: Una serie $\sum a_n$ es *conmutativamente convergente* si, para cada biyección $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la serie $\sum a_{\varphi(n)}$ converge a un valor que es independiente de φ. Por supuesto que una serie conmutativamente convergente es convergente.

8.1 Parte positiva y negativa de una serie

Fijemos una serie $\sum a_n$ de números reales. Definimos

$$p_n := \begin{cases} a_n & \text{si } a_n \geq 0, \\ 0 & \text{si } a_n < 0, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad q_n := \begin{cases} -a_n & \text{si } a_n \leq 0, \\ 0 & \text{si } a_n > 0. \end{cases}$$

Evidentemente $\sum p_n$ y $\sum q_n$ son series de términos positivos,

$$\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n \qquad \text{y} \qquad \sum |a_n| = \sum p_n + \sum q_n. \tag{8.8}$$

Proposition 8.1. *La siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *La serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente.*

(2) *Las series $\sum p_n$ y $\sum q_n$ son convergentes.*

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) Porque $\sum_{i=1}^{n} p_i \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$ y $\sum_{i=1}^{n} q_n \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
(2) $\Rightarrow$ (1) Por la segunda igualdad de (8.8). □

Remark 8.2. Usando la proposición anterior y la primera igualdad de (8.8) se obtiene facilmente otra prueba de la Proposition 7.12.

Remark 8.3. Si la serie $\sum |a_n|$ es divergente, entonces al menos una de las series $\sum p_n$ y $\sum q_n$ es divergente. Por otro lado, de la igualdad

$$\sum |a_n| = \sum a_n + 2\sum q_n = 2\sum p_n - \sum a_n,$$

se sigue que si la serie $\sum a_n$ es condicionalmente convergente, entonces necesariamente las dos series $\sum p_n$ y $\sum q_n$ son divergentes.

Theorem 8.4 (Reordenamiento de series)**.** *Toda serie absolutamente convergente es conmutativamente convergente.*

Proof. Consideremos primero el caso de una serie convergente de términos positivos $\sum a_n$. Tomemos una biyección $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y escribamos $b_n := a_{\varphi(n)}$. Afirmamos que $\sum b_n$ converge al mismo valor que $\sum a_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ escribamos $s_n := a_1 + \cdots + a_n$ y $t_n := b_1 + \cdots + b_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotemos con $m(n)$ al máximo de los números $\varphi(1), \dots, \varphi(n)$, de modo que $\{\varphi(1), \dots, \varphi(n)\} \subseteq \{1, \dots, m(n)\}$. En consecuencia $t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \le \sum_{i=1}^{m(n)} a_i = s_{m(n)}$. Por lo tanto $\lim t_n \le \lim s_n$. Por simetría $\lim t_n = \lim s_n$ y así $\sum b_n$ converge al mismo valor que $\sum a_n$. Consideremos ahora el caso general de una serie absolutamente convergente $\sum a_n$ y denotemos con $\sum p_n$ y $\sum q_n$ a sus partes positiva y negativa, respectivamente. Todo reordenamiento (b_n) de la sucesión (a_n) origina reordenamientos (u_n) de (p_n) y (v_n) de (q_n) respectivamente. Por la Proposición 8.1 y por lo que ya hemos probado todas estas serie convergen, $\sum p_n = \sum a_n$ y $\sum q_n = \sum v_n$. En consecuencia, por la segunda igualdad en (8.8),

$$\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n = \sum u_n - \sum v_n = \sum b_n,$$

como queremos. □

A continuación probamos un teorema debido a Riemman que muestra en particular que una serie convergente es conmutativamente convergente si y sólo si es absolutamente convergente.

Theorem 8.5. *Consideremos una serie condicionalmente convergente $\sum a_n$. Dados $u \le v$ en $\overline{\mathbb{R}}$ existe un reordenamiento (b_n) de (a_n) tal que $\liminf t_n = u$ y $\limsup t_n = v$, donde (t_n) es la sucesión de sumas parciales $t_n := b_1 + \cdots + b_n$, de la serie $\sum b_n$.*

Proof. Denotemos con $\sum p_n$ y $\sum q_n$ a la parte positiva y negativa de $\sum a_n$, respectivamente. Como $\sum a_n$ converge, $\lim a_n = 0$ y, por lo tanto, $\lim p_n = \lim q_n = 0$. Por otro lado, debido al Remark 8.3, las series $\sum p_n$ y $\sum q_n$ tienden a infinito. Para cada $i \in \mathbb{N}$ escribamos

$$u(i) := \begin{cases} -i & \text{si } u = -\infty, \\ u & \text{si } u \in \mathbb{R}, \\ i & \text{si } u = +\infty, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad v(i) := \begin{cases} -i & \text{si } v = -\infty, \\ v & \text{si } v \in \mathbb{R}, \\ i & \text{si } v = +\infty. \end{cases}$$

Reordenamos la serie $\sum a_n$ tomando como primeros términos $p_1, \dots, p_{n_1}$, donde n_1 es el primer índice tal que $p_1 + \cdots + p_{n_1} > v(1)$; luego tomamos términos $-q_1, \dots, -q_{m_1}$, donde m_1 es el primer índice tal que $p_1 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - \cdots - q_{m_1} < u(1)$; a continuación tomamos términos $p_{n_1+1}, \dots, p_{n_2}$, donde n_2 es el primer índice tal que $p_1 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - \cdots - q_{m_1} + p_{n_1+1} + \cdots + p_{n_2} > u(2)$; luego tomamos términos $-q_{m_1+1}, \dots, -q_{m_2}$, donde m_2 ha sido elegido como el primer índice tal que $p_1 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - \cdots - q_{m_1} + p_{n_1+1} + \cdots + p_{n_2} - q_{m_1+1} - \cdots - q_{m_2} < u(2)$; etcetera. Podemos hacer estas elecciones porque $\sum p_n = \sum q_n = +\infty$. Denotemos con (t_n) a la sucesión de sumas parciales de la serie obtenida con esta reordenación. Es fácil ver (usando que $\lim p_n = \lim q_n = 0$), que $\liminf t_n = u$ y $\limsup t_n = v$. □